



VERIFICAÇÃO DE FLECHAS EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO POR MODELAGEM NUMÉRICA

Li Chong Lee Bacelar de Castro – li.castro@integracao.gov.br
Departamento de Reabilitação e Reconstrução
Secretaria Nacional de Proteção e Defesa Civil
Ministério da Integração Nacional
Esplanada dos Ministérios, Bloco E, S/N - Zona Cívico-Administrativa
70.067-901– Brasília – Distrito Federal

Carlos Henrique Pianezzola – pianezzola@live.com
Departamento de Engenharia Civil
Pós-graduação em Engenharia Civil
Instituto de Ensino Superior Planalto - IESPLAN
SGAS 907
70.390-070– Brasília – Distrito Federal

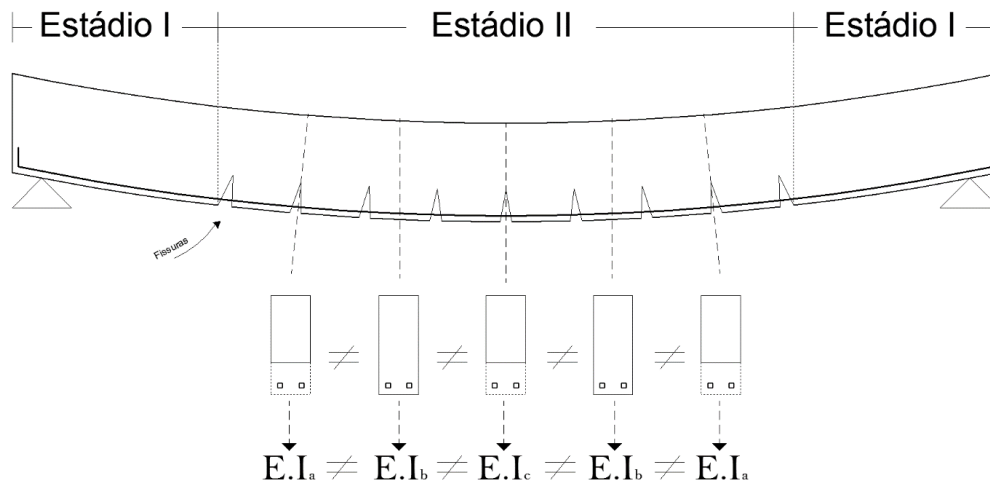
Resumo: *Este trabalho apresenta verificações de flechas em vigas de concreto armado no Estádio II, utilizando um método mais refinado da norma NBR 6118 (ABNT, 2014). Neste método considera-se parcelas ainda resistentes à tração das seções íntegras de concreto entre fissuras, seções com diferentes rigidezes e variação de tensão entre seções transversais da viga. Realizou-se uma modelagem numérica de deformações verticais ao longo de uma viga elaborando uma planilha eletrônica com o uso de integração numérica pela Regra dos Trapézio repetida. Como parâmetro comparativo, apresentou-se resultados numéricos de deformações pelo método simplificado da norma NBR 6118 (ABNT, 2014) diante os resultados pelo procedimento adotado neste trabalho. O modelo não-linear de Branson (BRANSON, 1965) mostrou-se bastante satisfatório em verificar as flechas em vigas no Estádio II. A construção do diagrama momento-curvatura provou-se eficiente em demonstrar o comportamento não-linear da peça fletida, mesmo por métodos numéricos e não experimentais.*

Palavras-chave: *Concreto Armado, Flechas, Modelagem numérica*



Devido a fissuração da peça fletida, há redução de rigidez à flexão, proporcionando diferentes rigidezes ao longo da peça. Este efeito pode ser observado na Figura 2. Percebe-se que em algumas seções transversais o momento de inércia difere entre eles.

Figura 2 - Comportamento de uma viga na flexão no Estado Limite de Serviço.

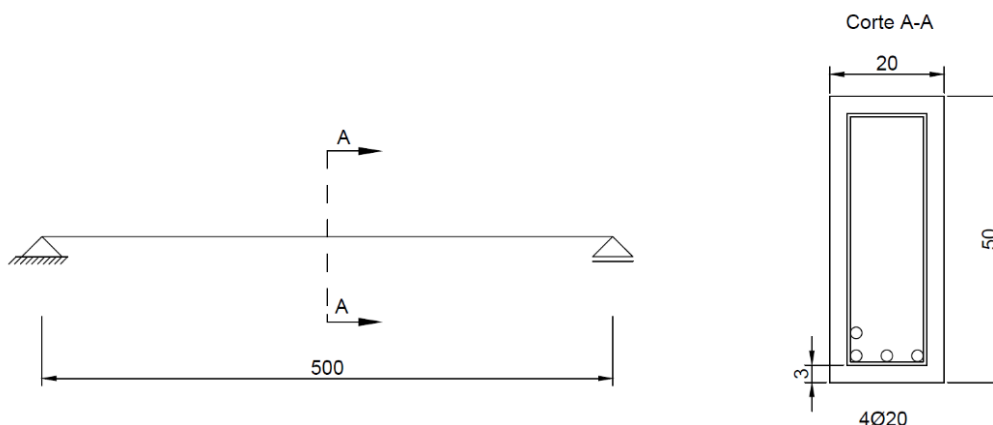


Utilizou-se o modelo de Branson (BRANSON, 1965) para calcular a inércia efetiva, considerando assim a mudança de rigidez a cada seção. No caso das deformações, calculou-se as curvaturas para cada seção da viga discretizada, considerando as suas diferentes rigidezes e tensões. Com os valores das curvaturas, realizou-se uma dupla integração para se obter as deformações lineares de cada seção. Os valores das integrais foram obtidos por integração numérica, utilizando a Regra do Trapézio repetida, também foi calculado o método proposto pela NBR 6118 item 17.3.2.1.1 (ABNT, 2014), visando a comparação de resultados apresentados.

2.1. Estrutura estudada

Conforme a NBR 6118 item 14.4.1.1 (ABNT, 2014), vigas são elementos lineares em que a flexão é preponderante. A viga utilizada para o estudo é uma biapoiada com seção transversal retangular, representada na Figura 3.

Figura 3 - Viga utilizada para o estudo.





Considerou-se, as seguintes propriedades do concreto e do aço, organizadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Propriedades do Concreto e do Aço

f_{ck} (MPa)	30
Agregado Graúdo	Brita 0 (Origem calcária)
f_{yk} (MPa)	500
$f_{ct,m}$ (kN/cm ²)	0,29
E_{ci} (kN/cm ²)	2760,52
E_{cs} (kN/cm ²)	2415,46
$E_{aço}$ (kN/cm ²)	21000

As características geométricas foram relacionadas na Tabela 2.

Tabela 2 - Características geométricas da viga estudada.

Vão (m)	5,00
b_w (m)	0,20
h (m)	0,50
c (m)	0,03
d (m)	0,45
I (m ⁴)	0,002083

Para o dimensionamento das armaduras, foram utilizadas as Equações (1) e (2) para encontrar, respectivamente, a posição da linha neutra e a área de aço.

$$x = 1,25.d. \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_d}{0,425.b_w.d^2.f_{cd}}} \right) \quad (1)$$

$$A_s = \frac{M_d}{(d - 0,4.x).f_{yd}} \quad (2)$$

O carregamento empregado para o dimensionamento da armadura foi calculado com a utilização da combinação última do tipo normal para concreto armado, especificada pela norma NBR 6118 item 11.8.2.4 (ABNT, 2014). Foram considerados dois valores para ações permanentes e uma ação variável. As ações permanentes consideradas constituem o peso dos elementos construtivos fixos (paredes, cerâmicas, forros, argamassas etc.) e o peso próprio da estrutura: $g_1 = 25$ kN/m e $g_2 = 2,5$ kN/m, respectivamente. A carga da ação variável tem valor de $q_1 = 18$ kN/m, representando ações variáveis durante a construção. Portanto, os valores do carregamento e área de aço utilizados foram esquematizados na Tabela 3.



Tabela 3 - Carregamentos, combinações e dimensionamento do aço da viga estudada.

Carregamentos (kN/m)		Combinação última (kN/m)	Dimensionamento	
g1 (Permanente)	25	63,7	x (cm)	18,09
g2 (Permanente)	2,5		As (cm ²)	12,12
q1 (Variável)	18		As,ef (cm ²)	12,6

O valor gerado pela combinação última foi utilizado apenas para o dimensionamento da área de aço necessária para resistir aos esforços de tração da viga fletida. Para a verificação das deformações desta viga, utilizou-se combinações em serviço calculadas no item 2.2 deste trabalho.

2.2. Estado limite de serviço

De acordo com a NBR 6118 item 11.8.3.1 (ABNT, 2014), as combinações de serviço são classificadas em: quase permanentes, frequentes e raras. Com o intuito de melhorar a avaliação do comportamento da viga estudada, os cálculos foram feitos apenas para a combinação quase permanente como exposto nas Tabela de 4.

Tabela 4 – Valores para Combinação CQP.

Carregamentos (kN/m)		Combinação Quase Permanente de Serviço (kN/m)
g1 (Permanente)	25	34,7
g2 (Permanente)	2,5	
q1 (Variável)	18	

A contribuição da rigidez das seções íntegras de concreto entre fissuras (*tension stiffening*) foi calculada utilizando a Equação (3) para encontrar o momento de inércia efetivo (BRANSON, 1965).

$$I_{ef} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^m\right] \cdot I_{II} \quad (3)$$

O momento de fissuração indica se a seção transversal se encontra no Estádio I ou Estádio II, comparando-a com o momento fletor atuante na seção. A NBR 6118 item 17.3.1 (ABNT, 2014) apresenta uma equação para o cálculo do momento de fissuração utilizando o momento de inércia da seção bruta de concreto, porém esta simplificação pode resultar em valores irrealistas, principalmente para vigas super armadas. Logo, adaptou-se a equação com o momento de inércia homogeneizado no Estádio I, apresentado na Equação (4).

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct,m} \cdot I_I}{y_t} \quad (4)$$



A Tabela 5 apresenta os valores dos momentos de inércia, posições da linha neutra e momento de fissuração apresentados nas equações deste item, posteriormente utilizados na construção da planilha eletrônica. O momento de inércia efetiva foi calculado para cada seção da viga discretizada neste trabalho no item 2.2.3.1.

Tabela 5 - Momentos de Inércia, Momento de fissuração e posições da linha neutra calculados

Momento de fissuração (kN.m)	46,76
α_E	8,69
X_1 (cm)	26,97
X_2 (cm)	17,39
I_I (cm ⁴)	247825,04
I_{II} (cm ⁴)	118566,75

2.3. Construção da planilha eletrônica (Diagrama Momento-Curvatura)

Primeiramente, considerou-se a aproximação do valor da curvatura e da equação diferencial da linha elástica pela teoria clássica da barra de Euler-Bernoulli. Por conta das deformações nas peças estruturais serem muito pequenas, pode-se realizar esta aproximação apresentada na Equação (5).

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \cong \frac{1}{r} \quad (5)$$

Portanto, calculou-se as curvaturas de cada seção transversal no Estádio I, Estádio II puro e Estádio II com colaboração das seções íntegras de concreto entre as fissuras. As deformações foram calculadas com as curvaturas geradas pelo momento de inércia efetivo. O cálculo do momento atuante em cada seção transversal foi obtido pela Equação (6).

$$M(x) = \frac{q \cdot L \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (6)$$

Os resultados desenvolvidos neste item foram tabelados no item 2.4, contendo os momentos fletores atuantes em cada seção transversal, momento de inércia efetiva calculado pelo modelo de Branson e curvaturas de cada seção transversal para a combinação quase permanente.

O diagrama da curvatura foi gerado para integração numérica analisando a Equação (5), onde percebe-se que a derivada segunda da função dos deslocamentos proporciona uma função para as curvaturas da viga. Sendo assim, com os valores das curvaturas, é possível calcular as rotações e deslocamentos pela integração e dupla integração das curvaturas, respectivamente apresentadas na Equação (7) e (8).

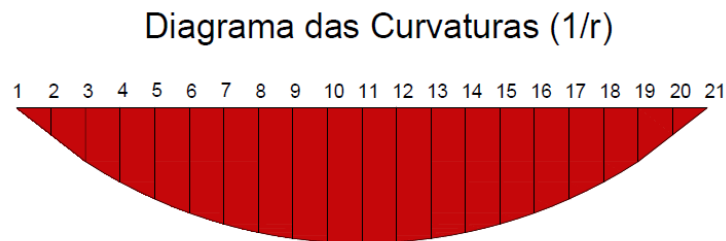
$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx \cong \int_0^x \frac{1}{r}(x) dx \quad (7)$$



$$y(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{M(x)}{EI} dx \cong \int_0^x \int_0^x \frac{1}{r}(x) dx \quad (8)$$

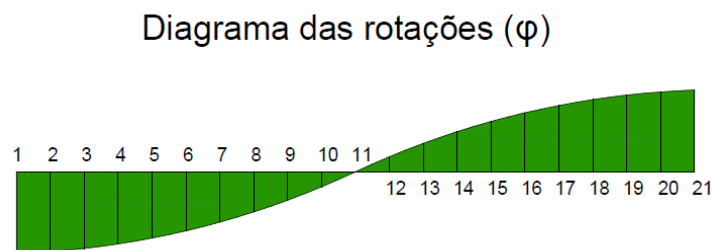
Desta forma, com os diagramas das curvaturas gerados pelo método apresentado aplicou-se a Regra do Trapézio repetida para cada diagrama gerado, afim de se obter equações que se aproximem do valor numérico das integrais apresentadas nas Equações (7) e (8). A Figura 4 apresenta um exemplo da divisão do diagrama em trapézios.

Figura 1 - Diagrama das curvaturas dividida em trapézios.



Seguindo a condição inicial de que a rotação é nula na seção transversal central da viga ($\phi_{11} = 0$), obtém-se a integral numérica que representa as rotações pela Regra do Trapézio repetida e o diagrama de rotações (Figura 5).

Figura 2 - Diagrama das rotações dividida em trapézios.



2.4. Software utilizado

O método adotado para calcular as deformações lineares neste trabalho requer uma divisão da viga estudada em diversas seções transversais, visando diminuir o erro presente pela integração numérica, que nada mais é do que uma substituição da curva original por diversos segmentos de reta. Utilizou-se, assim, uma planilha eletrônica no Microsoft Excel (2013) para o cálculo das deformações lineares, por conta da grande quantidade de cálculos a serem feitos para cada seção transversal da viga. Neste trabalho, a viga foi dividida em vinte seções transversais, visando maior aproximação numérica dos resultados pela Regra do Trapézio repetida da curva original de deformações.

3. RESULTADOS

Na Tabela 6 encontra-se os resultados da planilha eletrônica desenvolvida, como o momento fletor, inércia efetiva pelo modelo de Branson, curvaturas, rotações e deformações de



cada seção transversal da combinação de serviço utilizada. Na Tabela 7 encontram-se os resultados das flechas pelo método proposto pela norma.

Tabela 6 - Resultados da planilha eletrônica para Combinação Quase Permanente de Serviço.

Seção	L (m)	Momento (kN.m)	Inércia efetiva (m ⁴)	1000(1/r) _I	1000(1/r) _{II}	1000(1/r) _m	φ (rad)	y (mm)
1	0,00	0,00	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0054	0,00
2	0,25	20,60	0,0025	0,0034	0,0072	0,0034	-0,0054	1,36
3	0,50	39,04	0,0025	0,0065	0,0136	0,0065	-0,0053	2,70
4	0,75	55,30	0,0018	0,0092	0,0193	0,0124	-0,0050	4,00
5	1,00	69,40	0,0015	0,0116	0,0242	0,0198	-0,0046	5,22
6	1,25	81,33	0,0013	0,0136	0,0284	0,0254	-0,0041	6,31
7	1,50	91,09	0,0013	0,0152	0,0318	0,0296	-0,0034	7,25
8	1,75	98,68	0,0013	0,0165	0,0345	0,0327	-0,0026	8,01
9	2,00	104,10	0,0012	0,0174	0,0363	0,0348	-0,0017	8,56
10	2,25	107,35	0,0012	0,0179	0,0375	0,0361	-0,0009	8,90
11	2,50	108,44	0,0012	0,0181	0,0379	0,0365	0,0000	9,01
12	2,75	107,35	0,0012	0,0179	0,0375	0,0361	0,0009	8,90
13	3,00	104,10	0,0012	0,0174	0,0363	0,0348	0,0017	8,56
14	3,25	98,68	0,0013	0,0165	0,0345	0,0327	0,0026	8,01
15	3,50	91,09	0,0013	0,0152	0,0318	0,0296	0,0034	7,25
16	3,75	81,33	0,0013	0,0136	0,0284	0,0254	0,0041	6,31
17	4,00	69,40	0,0015	0,0116	0,0242	0,0198	0,0046	5,22
18	4,25	55,30	0,0018	0,0092	0,0193	0,0124	0,0050	4,00
19	4,50	39,04	0,0025	0,0065	0,0136	0,0065	0,0053	2,70
20	4,75	20,60	0,0025	0,0034	0,0072	0,0034	0,0054	1,36
21	5,00	0,00	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	0,0054	0,00

Tabela 7 - Resultado da flecha imediata pelo método da NBR 6118:2014 para Combinação Quase Permanente de Serviço.

$EI_{eq,t0}$	f (mm)
30378,16	9,30

Observa-se que a variação entre o método da norma e o método calculado por integração numérica é aproximadamente de 3%.

Na Tabela 8, apresenta-se o comparativo entre a rigidez calculada pelo modelo de Branson e a rigidez pelo método da norma para cada combinação utilizada.

Tabela 16 - Comparativo de rigidezes.

Combinação	CQP
Rigidez Branson	29719,05
Rigidez NBR 6118	30378,16
Variação (%)	2,2

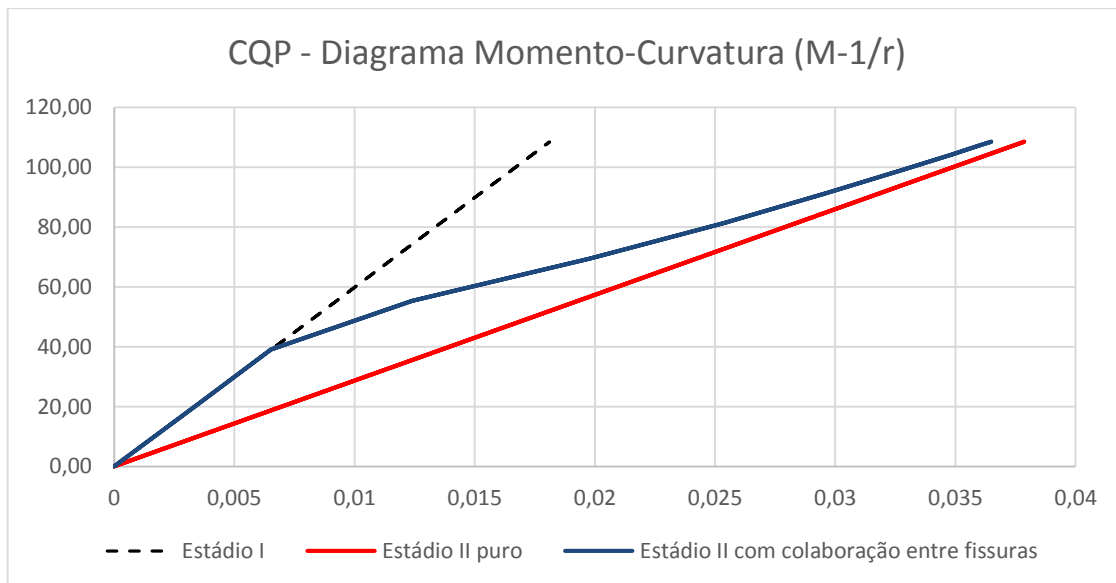


É possível notar que a rigidez calculada pela norma se aproxima do valor da rigidez calculada pelo modelo de Branson de acordo com o aumento de carregamento, justificando a diminuição de variação entre os métodos de cálculo das flechas utilizadas neste trabalho.

3.1. Diagramas Momento-Curvatura (M-1/r)

Com os valores dos momentos fletores e curvaturas no Estádio I, Estádio II puro e Estádio II com colaboração de seções íntegras de concreto entre fissuras de cada seção transversal da viga discretizada, construiu-se o diagrama Momento-Curvatura (Figura 6).

Figura 3 - Diagrama Momento-Curvatura gerada pela Combinação Quase Permanente de Serviço



Nos diagramas apresentados, o Estádio II com colaboração entre fissuras é uma média entre o Estádio I e Estádio II puro. Inicialmente, a curvatura acompanha a linha representando o Estádio I, pois nenhuma das seções atingiram o momento de fissura, conseqüentemente não atingindo o Estádio II. Após o momento de fissura, a curvatura não mais acompanha o crescimento de curvatura no Estádio I, apresentando um crescimento mais aproximado do Estádio II puro.

Fica claro a aproximação da linha do Estádio II com colaboração entre fissuras e da linha do Estádio II puro em valores de momento mais elevados, pois com o aumento de carregamento, mais seções transversais irão apresentar fissuras, diminuindo seções íntegras de concreto que possam colaborar na resistência a tração com a armadura, ou seja, mais seções com rigidez baixa.

A representação da curvatura neste diagrama apresenta o real comportamento da peça fletida, uma vez que, o diagrama é formado experimentalmente, além do módulo de elasticidade e resistência a flexão serem definidos por meio de ensaios e não aproximações, como proposto pela NBR 6118.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A flecha gerada pela planilha desenvolvida apresenta valor muito próximo do método proposto pela NBR 6118 (ABNT, 2014), mostrando que o método por integração numérica das



curvaturas, obtidas pelo modelo não-linear de Branson (BRANSON, 1965) é bastante satisfatório para verificação de flechas em vigas no Estádio II.

Há uma diminuição na variação entre os métodos quando o carregamento aumenta, isto acontece pela aproximação de rigidezes entre o modelo de Branson e o método da norma. Portanto, é razoável dizer que o método da norma apresenta resultados mais satisfatórios em carregamentos elevados, comparando-o com o método por integração numérica. Para confirmar essa afirmação, faz-se necessária a análise, não apenas da viga utilizada neste trabalho, assim como outras vigas diferentemente apoiadas sobre ação de diversos carregamentos.

Com a construção dos diagramas momento-curvatura no Estádio I e II, é possível notar a diferença de curvaturas considerando a não-linearidade física do concreto, mostrando a eficiência dos diagramas em apresentar esse efeito.

Importantes parâmetros precisaram ser determinados para a construção dos diagramas, como a resistência à tração e o módulo de elasticidade, de forma aproximada pelos métodos propostos pela NBR 6118. Portanto, a utilização de ensaios é recomendada para se obter um diagrama momento-curvatura que represente de melhor forma o real comportamento da peça fletida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BRANSON, Dan E. Deflexiones de estructuras de concreto reforzado y presforzado. México: IMCYC, 1965.

DEFLECTION CHECK ON REINFORCED CONCRETE BEAMS BY NUMERICAL MODELING

Abstract: *This paper presents deflection check on reinforced concrete beams at stadium II using a more refined method of NBR 6118 (ABNT, 2014). In this method, it is still considered resistant traction portions of intact sections of concrete between cracks, sections with different stiffness and tension variation between cross sections of the beam. It was performed a numerical modeling of vertical deformation along a beam using a spreadsheet with numerical integration by Rule Trapezoid repeated. As a comparative, it presented numerical results of deflections by the simplified method of the NBR 6118 (ABNT, 2014) on the results of the procedure adopted in this paper. The nonlinear model of Branson (BRANSON 1965) proved to be quite satisfactory in checking the deflection beams in Stadium II. The drawing of the moment-curvature diagram proved effective in demonstrating the non-linear behavior of the structure, even by numerical and non-experimental methods.*

Key-words: *Reinforced Concrete, Deflection, Numerical modeling*